n，r を正の整数とし，$n \geqq r$ とする。

$$\lim_{n\to\infty} {}_n\mathrm{C}_r\left(\frac{1}{n}\right)^r\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n-r}$$

を求めよ。ただし，${}_n\mathrm{C}_r$ は二項係数を表す。

＜ '70 九州大 ＞

【戦略】

まずはコンビネーションを書き下していきます。

極限の計算において大切なことは

「悪さしないやつは，ほっとく」

という態度です。

不定形を作っている部分に目を向け，余計な部分に気を取られないようにしたいところです。

今回の不定形の根源は $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n$ **です。**

基本的に 1^∞ **タイプの不定形は** $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$ **という定義を用いて処理することを疑います。**

そこで

$$\begin{aligned}1-\frac{1}{n}&=\frac{n-1}{n}\\&=\frac{1}{\dfrac{n}{n-1}}\\&=\frac{1}{\dfrac{n-1+1}{n-1}}\\&=\frac{1}{1+\dfrac{1}{n-1}}\end{aligned}$$

という変形により $1+\dfrac{1}{\bigcirc}$ **という形を作っていきます。**

解答

$$\begin{aligned}&{}_n\mathrm{C}_r\left(\frac{1}{n}\right)^r\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n-r}\\
&=\frac{\overbrace{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}^{r\text{個}}}{r!}\cdot\frac{1}{\underbrace{n\cdot n\cdot\cdots\cdot n}_{r\text{個}}}\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)^n\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-r}\\
&=\frac{1}{r!}\cdot\frac{1}{\left(1-\frac{1}{n}\right)^r}\cdot\overbrace{\frac{n}{n}\cdot\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-2}{n}\cdot\cdots\cdot\frac{n-r+1}{n}}^{\text{悪さしない連中}}\overbrace{\left(1-\frac{1}{n}\right)^n}^{\text{ここが不定形の根源}}\\
&=\frac{1}{r!}\cdot\frac{1}{\left(1-\frac{1}{n}\right)^r}1\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdot\cdots\cdot\left(1-\frac{r-1}{n}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)^n\end{aligned}$$

ここで，

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n&=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-1}{n}\right)^n\\
&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(\frac{n}{n-1}\right)^n}\\
&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n}\\
&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}\left(1+\frac{1}{n-1}\right)}\\
&=\frac{1}{e\cdot 1}\\
&=\frac{1}{e}\end{aligned}$$

ゆえに，

$$\begin{aligned}(\text{与式})&=\frac{1}{r!}\cdot\frac{1}{1^r}\cdot1\cdot1\cdot\cdots\cdot1\cdot\frac{1}{e}\\&=\frac{1}{er!}\ \cdots\text{答}\end{aligned}$$

【総括】

反復試行の確率の形をしていて，変なことを考え出すと右往左往しかねません。

シンプルに極限の問題だと考えましょう。

$1-\dfrac{1}{n}=\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{n-1}}$ という式変形は「地力 or 経験」のいずれかがないと厳しいかもしれません。

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$ という定義と合わせて，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n=\frac{1}{e}$ という結果は常識にしておくとよいでしょう。

＜e（ネイピア数）に関する周辺の関連事項＞

①：$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e$

（これは定義です。）

$-\infty$ のときを考えるので文字を実数感の強い x にしました。

②：$\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e$

（$x\to-\infty$になっても e に収束します。）

③：$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^{x}=\frac{1}{e}$

（1 よりもほんの少し小さいものをかけ続けるので結果は 1 より小さくなると考えれば区別がつきます。）

＜② の証明＞

$t=-x$ とおくと，

$-\infty$ のときの極限ではこの置き換えで ∞ の極限にするのが常套手段です。

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}&=\lim_{t\to\infty}\left(1-\frac{1}{t}\right)^{-t}\\
&=\lim_{t\to\infty}\left(\frac{t-1}{t}\right)^{-t}\\
&=\lim_{t\to\infty}\left(\frac{t}{t-1}\right)^{t}\\
&=\lim_{t\to\infty}\left(\frac{t-1+1}{t-1}\right)^{t}\\
&=\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t-1}\right)^{t}\\
&=\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t-1}\right)^{t-1}\left(1+\frac{1}{t-1}\right)\\
&=e\cdot 1\\
&=e
\end{aligned}
$$

＜③ の証明＞

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^{x}&=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x}\right)^{x}\\
&=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\left(\dfrac{x}{x-1}\right)^{x}}\\
&=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\left(1+\dfrac{1}{x-1}\right)^{x}}\\
&=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\left(1+\dfrac{1}{x-1}\right)^{x-1}\left(1+\dfrac{1}{x-1}\right)}\\
&=\frac{1}{e\cdot 1}\\
&=\frac{1}{e}
\end{aligned}
$$